

Pregled teorije vjerovatnoće II

TELEKOMUNIKACIONE MREŽE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET PODGORICA

Sadržaj

- ✓ Funkcija raspodjele slučajne promjenjive (CDF)
- ✓ Funkcija gustine vjerovatnoće (PDF)
- ✓ Združena funkcija raspodjele i gustine vjerovatnoće
- ✓ Uslovna funkcija raspodjele i gustine vjerovatnoće
- ✓ CDF i PDF sume slučajnih promjenjivih
- ✓ CDF i PDF maksimuma i minimuma slučajnih promjenjivih
- ✓ Poređenje slučajnih promjenjivih
- ✓ Momenti slučajne promjenjive
- ✓ Funkcija generisanja vjerovatnoće

Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

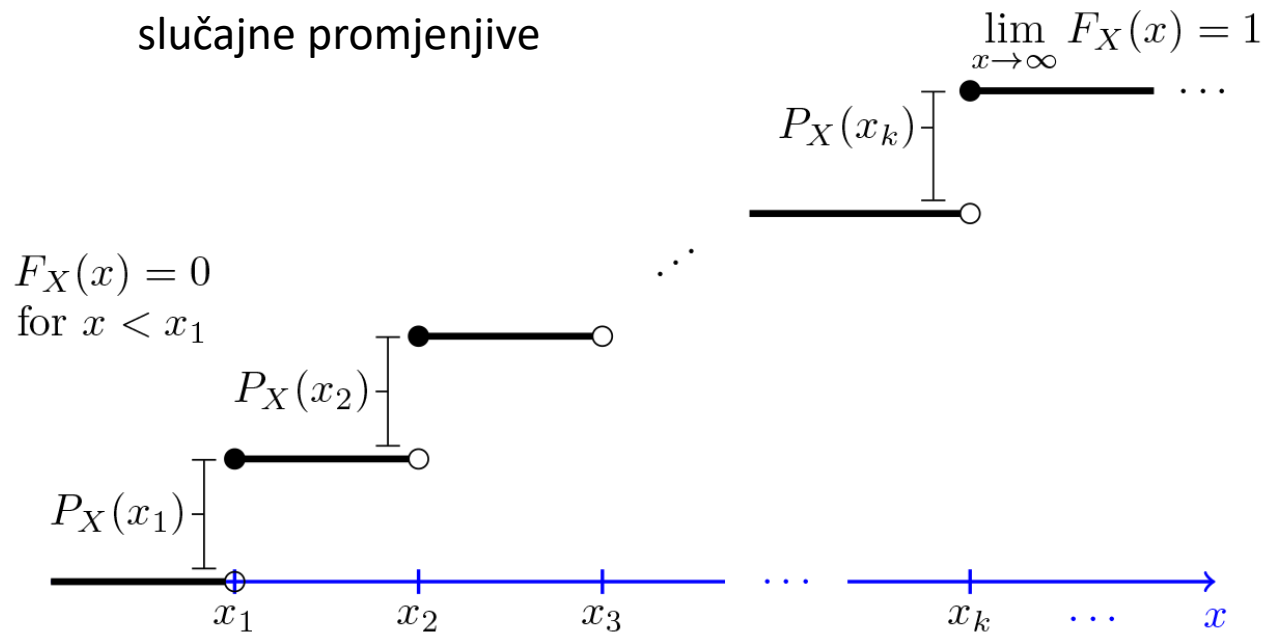
$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- bezdimenziona veličina
- $F_X(x)$ je neopadajuća funkcija
- $F_X(x)$ teži 1 kada x teži $+\infty$, odnosno 0 kada x teži $-\infty$
- $F_X(x)$ je kontinualna funkcija: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$
- Za diskretnu slučajnu promjenljivu $F_X(x)$ je stepeničasta funkcija sa koracima jednakim vjerovatnoći diskretnih događaja

$$F_X(x) = P(X \leq x_n) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i)h(X - x_i)$$

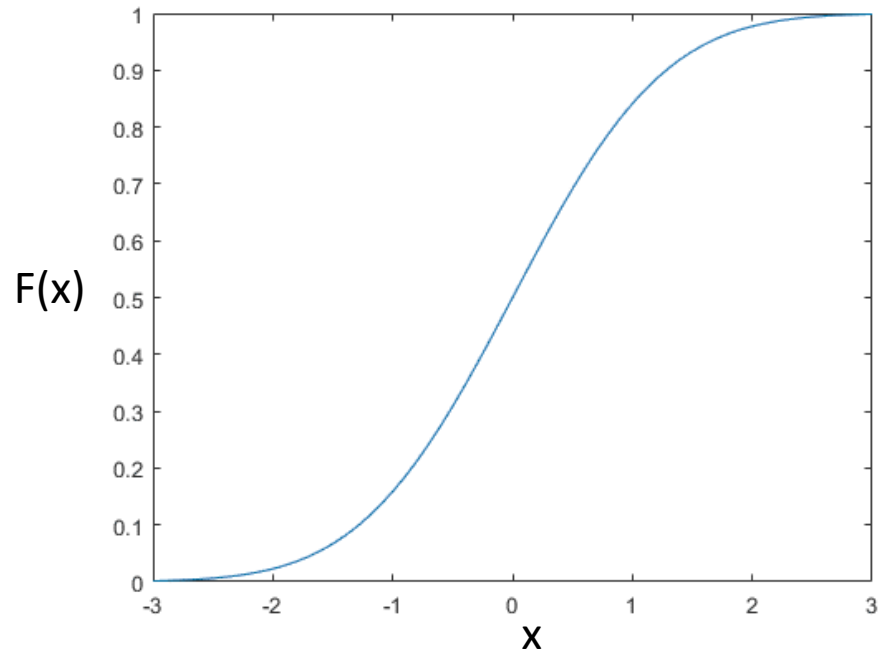
Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

CDF funkcija **diskretne** slučajne promjenljive



Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

CDF funkcija **kontinualne** slučajne promjenjive



Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

➤ Izračunavanje vjerovatnoće da se slučajna promjenljiva nalazi u opsegu:

$$\{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}$$

$$P\{X \leq x_2\} = P\{X \leq x_1\} + P\{x_1 < X \leq x_2\}$$

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2\} &= P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} \\ &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \end{aligned}$$

Funkcija gustine vjerovatnoće

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

➤ $f_X(x) \geq 0$

➤ Dobijanje funkcije raspodjele iz $f_X(x)$: $\int_{-\infty}^x f(y) dy = F(x)$

➤ Uslov normalizovanosti: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

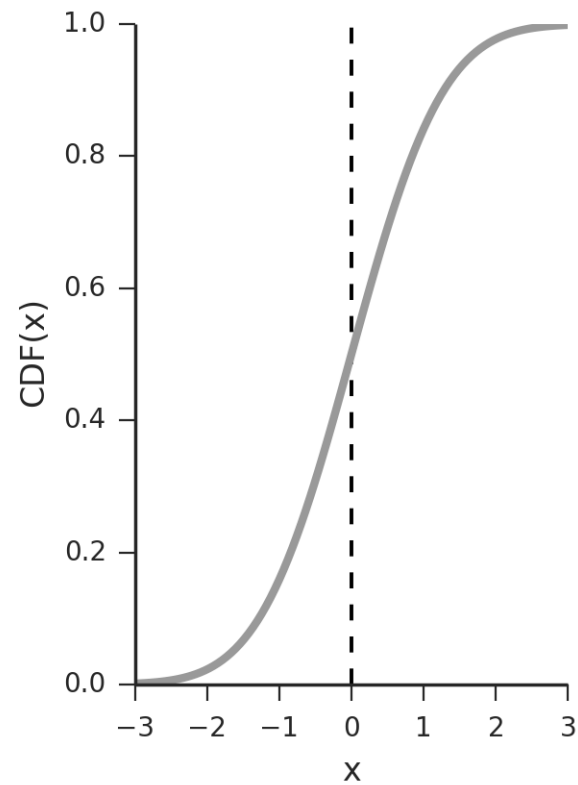
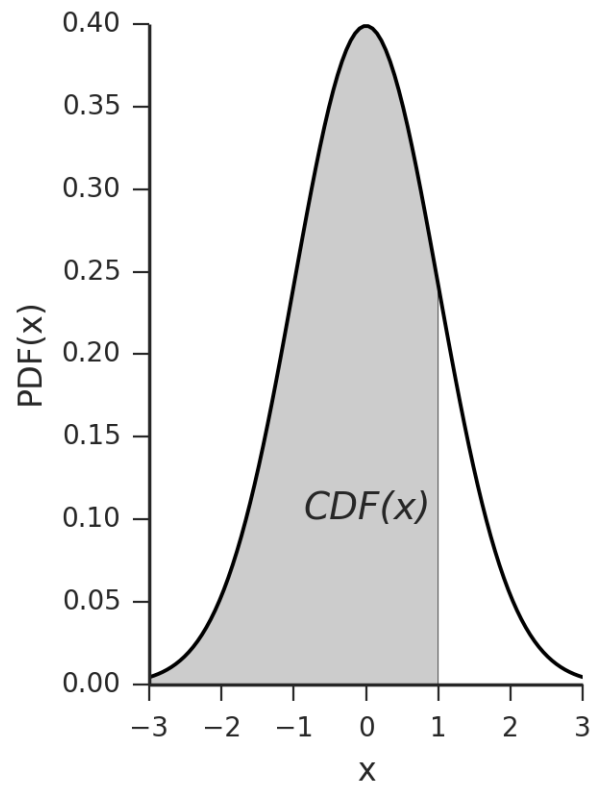
➤ Vjerovatnoća i gustina:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$f(x) dx = P(x \leq X \leq x + dx)$$

➤ Za diskretno X : $f(x) = \sum_{i=0}^n P(X = x_i) \cdot \delta(x - x_i)$

Funkcija gustine vjerovatnoće



Združena raspodjela

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) \Leftrightarrow F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(x, y) dx dy$$

Marginalna
raspodjela

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f_{XY}(x) dy$$

Statistički
nezavisne
slučajne
promjenljive

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x)$$
$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x)$$

Uslovna raspodjela

- Osobine uslovne raspodjele:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$F_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} F_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$

- **Primjer:** Neka je uslovna funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenjive X, za Y=y:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{x+y}{1+y} e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty$$

Odrediti vjerovatnoću $P(X \leq 1|Y = 3)$.

Uslovna raspodjela

Primjer: Neka su X i Y dvije kontinualne slučajne promjenjive sa združenom PDF:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{6} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{za ostale vrijednosti } x \text{ i } y \end{cases}$$

Za $0 \leq y \leq 2$, odrediti:

- a) Uslovnu PDF za X ako je $Y = y$
- b) $P\left(X \leq \frac{1}{2} \mid Y = y\right)$

Suma slučajnih promjenjivih

➤ Neka je $Z = X + Y$

➤ CDF od Z:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x, y) dy dx$$

➤ PDF od Z:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) dx$$

➤ Ukoliko su X i Y nezavisne slučajne promjenjive, onda važi:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

➤ Za diskretne slučajne promjenjive: $P(Z = k) = \sum_i P(X = i) P(Y = k - i)$

Maksimum i minimum slučajnih promjenjivih

- Neka su slučajne promjenjive Q i W definisane na sledeći način:

$$Q = \max(X, Y) \quad W = \min(X, Y)$$

- Tada važi:

$$F_Q(q) = P(Q \leq q) = P(X \leq q, Y \leq q)$$

Ako su X i Y
nezavisne:

$$F_Q(q) = P(X \leq q)P(Y \leq q) = F_X(q)F_Y(q)$$

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) = P(\{X \leq w\} \cup \{Y \leq w\}) \\ &= P(X \leq w) + P(Y \leq w) - P(\{X \leq w\} \cap \{Y \leq w\}) \end{aligned}$$

Ako su X i Y
nezavisne:

$$F_W(w) = F_X(w) + F_Y(w) - F_X(w)F_Y(w)$$

Poređenje slučajnih promjenjivih

➤ Tražimo vjerovanoću da je $X > Y$:

$$P(X > Y) = \int P(X > y | Y = y) f_Y(y) dy$$

Ako su X i Y
nezavisne:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \int P(X > y) f_Y(y) dy \\ &= \int (1 - F_X(y)) f_Y(y) dy \end{aligned}$$

Momenti slučajne promjenjive

➤ Matematičko očekivanje

$$E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & \text{- Za kontinualne slučajne promjenjive} \\ \sum_i x_i P(X = x_i) & \text{- Za diskretne slučajne promjenjive} \end{cases}$$

➤ Osobine:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad \text{- Ovo važi bez obzira na zavisnost sl. promjenjivih}$$

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] \quad \text{- Ako su X i Y nezavisne sl. promjenjive}$$

Momenti slučajne promjenjive

- m-ti moment slučajne promjenjive:

$$E[X^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx \quad - \text{ Za kontinualne slučajne promjenjive}$$

$$E[X^m] = \sum_i x_i^m P(X = x_i) \quad - \text{ Za diskretne slučajne promjenjive}$$

- **Varijansa:**

- Drugi moment slučajne promjenjive

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2 + E[X]^2 - 2XE[X]] = \\ &= E[X^2] + E[X]^2 - 2E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

- Osobine:

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \quad - \text{ Za } \textbf{nezavisne} \text{ slučajne promjenjive}$$

Momenti slučajne promjenjive

- Standardna devijacija:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Koeficijent varijabilnosti:

$$C_X = \frac{\sigma_X}{E[X]}$$

- Centralni moment m-tog reda:

$$E[(X - E[X])^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E[X])^m f(x) dx$$

- Kovarijansa:

$$c_{XY} = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Transformacije slučajne promjenjive

➤ Funkcija generisanja vjerovatnoće

- Primjenjuje se na diskretne slučajne promjenjive poznate raspodjele vjerovatnoća koje uzimaju nenegativne i cjelobrojne vrijednosti.

$$X(z) = E[z^X] = \sum_k z^k P(X = k), \quad \text{za } |z| \leq 1$$

- Radi se o nizu sa nenegativnim koeficijentima, koji je definisan za sve vrijednosti slučajne promjenjive.

$$X(z = 1) = \sum_k P(X = k) = 1$$

$$|X(z)| = \left| \sum_k z^k P(X = k) \right| \leq \sum_k |z^k P(X = k)| = \sum_k |z^k| P(X = k) \leq \sum_k P(X = k) = 1$$

Transformacije slučajne promjenjive

➤ Funkcija generisanja vjerovatnoće

$$X'(z) = \frac{d}{dz} \sum_k z^k P(X = k) = \sum_k \frac{d}{dz} z^k P(X = k) = \sum_k k z^{k-1} P(X = k)$$

$$\Rightarrow X'(z = 1) = \sum_k k P(X = k) = E[X]$$

$$X''(z) = \frac{d}{dz} \sum_k k z^{k-1} P(X = k) = \sum_k k \frac{d}{dz} z^{k-1} P(X = k) = \sum_k k(k-1) z^{k-2} P(X = k)$$

$$\Rightarrow X''(z = 1) = \sum_k k^2 P(X = k) - \sum_k k P(X = k)$$

$$X''(z = 1) + X'(z = 1) = E[X^2]$$

Transformacije slučajne promjenjive

➤ Funkcija generisanja vjerovatnoće

- Razmotrimo dvije slučajne promjenjive X i Y , i nađimo funkciju generisanja vjerovatnoća njihove sume $W=X+Y$

$$\begin{aligned}P(W = j) &= \sum_k P(X = k)P(Y = j - k) \\ &= P(X = k) \otimes P(Y = k) \quad \Leftrightarrow \textit{konvolucija}\end{aligned}$$

- Iz osobina z transformacije slijedi:

$$\begin{aligned}W(z) &= \sum_j \sum_k z^j P(X = k)P(Y = j - k) \\ &= \sum_k P(X = k) \sum_j z^j P(Y = j - k) \\ &= \sum_k P(X = k) z^k \sum_j z^{j-k} P(Y = j - k) = X(z)Y(z)\end{aligned}$$

Transformacije slučajne promjenjive

➤ **Funkcija generisanja vjerovatnoće**

- Nekada je poznata funkcija generisanja vjerovatnoća, a treba odrediti raspodjelu vjerovatnoća

$$X(z) = \sum_k z^k P(X = k) \quad \rightarrow \quad P(X = k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} X(z) \Big|_{z=0}$$

Na osnovu razvoja Mac Laurinovog reda

Transformacije slučajne promjenjive

➤ Laplasova transformacija

- Za slučajnu promjenljivu X (kontinualnu definisanu za $x \in [0, +\infty\}$ ili diskretnu) sa funkcijom gustine raspodjele $f_X(x)$ Laplasova transformacija $X(s)$ je definisana kao:

$$X(s) = E[e^{-sx}] = \begin{cases} \int_0^{\infty} f_X(x) e^{-sx} dx \\ \sum_i P(X = i) e^{-si} \end{cases}$$

- Veza između Laplasove transformacije i *karakteristične funkcije* za kontinualne slučajne promjenjive $x \in [0, +\infty\}$ se dobija za $s = -j\omega$
- Uslov normalizovanosti: $X(s = 0) = 1$
- Slično kao za karakterističnu funkciju može se pokazati da važi:

$$E[X^m] = (-1)^m X^{(m)}(s = 0)$$